Exercice 1

1°/ Traduction de la relation $P(X \leqslant 2) = 0{,}5793$.

Désignons par F la **<u>fonction de répartition de la variable normale centrée réduite</u>**.

$$P(X \leqslant 2) = 0{,}5793 \Leftrightarrow F\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = 0{,}5793$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite fournit :

$$F(0{,}20) = 0{,}5793$$

Comme la fonction F est une bijection monotone strictement croissante de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]\,0 ; 1\,[$, la relation

$$F\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = F(0{,}20)$$

est équivalente à :

$$\frac{2-m}{\sigma} = 0{,}20 = \frac{1}{5}$$
$$5\,m + \sigma = 10$$

2°/ Traduction de la relation $P(X > 5) = 0{,}2119$.

$$P(X > 5) = 0{,}2119 \Leftrightarrow P(X \leqslant 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - 0{,}2119 = 0{,}7881 \Leftrightarrow F\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = 0{,}7881$$

Or la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite fournit :

$$F(0{,}80) = 0{,}7881$$

Comme la fonction F est une bijection, la relation $F\left(\frac{5-m}{\sigma}\right) = F(0{,}80)$ équivaut à

$$\frac{5-m}{\sigma} = 0{,}80 = \frac{4}{5}$$
$$5\,m + 4\,\sigma = 25$$

3°/ Valeurs de *m* et σ.

Le système de deux équations du premier degré :

$$5\,m + \sigma = 10$$
$$5\,m + 4\,\sigma = 25$$

a pour unique solution, calculée par soustraction, puis substitution :

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 1 \\ \sigma = 5 \end{array}}$$

Exercice 2

Désignons par *F* la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite.

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = F\left(\frac{20{,}25 - 20{,}00}{0{,}15}\right) - F\left(\frac{19{,}75 - 20{,}00}{0{,}15}\right) = F\left(\frac{5}{3}\right) - F\left(-\frac{5}{3}\right)$$

La relation $F\,(-\,u) = 1 - F\,(u)$ entraîne alors :

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 2\,F\left(\frac{5}{3}\right) - 1$$

Or la table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$F\left(\frac{5}{3}\right) = 0{,}9522$$

On en déduit :

$$P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 2 \times 0{,}9522 - 1 = 0{,}9044$$

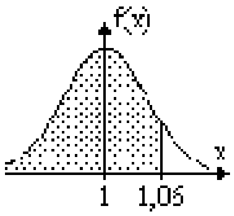
$$\boxed{P\,(19{,}75 < X < 20{,}25) = 0{,}9044}$$

°/ Probabilité de divers intervalles de valeurs de la glycémie.

Notons X la glycémie mesurée sur un individu de la population.
X suit une loi normale N (1,00 ; 0,032). La variable aléatoire centrée réduite correspondante $U = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale N (0 ; 1).

a) P (X < 1,06)

C'est la surface hachurée suivante :



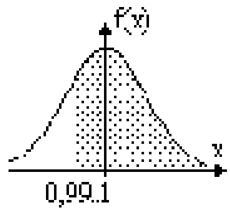
La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$P\,(X < 1{,}06\,) = P\left(U < \frac{1{,}06-1}{0{,}03}\right) = P\,(U < 2\,) = F\,(\,2\,) \approx 0{,}9772$$

$$\boxed{P\,(X < 1{,}06\,) = 0{,}9772}$$

b) P (X > 0,9985)

C'est la surface hachurée suivante :



La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$P\,(X > 0{,}9985\,) = 1 - P\,(X < 0.9985) = 1 - F[(0.9985-1)/0.03] = 1 - F(-0.05)$$

$$P\,(X > 0{,}9985\,) = F\,(\,0{,}05\,) \approx 0{,}5199$$

$$\boxed{P\,(X > 0{,}9985\,) = 0{,}5199}$$

Remarque.

Comme la valeur 0,05 est petite, on peut avoir une approximation de la valeur de F en utilisant un développement en série :

$$F\,(u) = F\,(0) + u\,F'\,(0) + F''\,(0) + F'''\,(0) + \ldots,$$

avec $F'\,(u) = f\,(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. En se limitant aux trois premiers termes non nuls, on obtient :

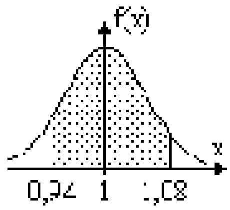
$$F\,(0) = 0{,}5,\; F'\,(0) = f\,(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\; F''\,(0) = f'\,(0) = 0,\; F'''\,(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\; \ldots$$

$$F\,(0{,}05\,) \approx 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0{,}05 - \frac{0{,}05^3}{6}\right) \approx 0{,}5199$$

C'est déjà une bonne approximation.

c) P (0,94 < X < 1,08)

C'est la surface hachurée suivante :



La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$P\,(0{,}94 < X < 1{,}08\,) = F\left(\frac{8}{3}\right) - F\,(-2\,) = F\left(\frac{8}{3}\right) - 1 + F\,(\,2\,)$$

$$= 0{,}9962 + 0{,}9772 - 1 = 0{,}9734$$

$$\boxed{P\,(0{,}94 < X < 1{,}08\,) = 0{,}9734}$$

2°/ Nombre moyen d'individus.

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite donne :

$$P\,(X > 0{,}99\,) = 1 - F\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1 - 0{,}3694 = 0{,}6306.$$

Pour un individu de la population dont est extrait l'échantillon de 1000 individus, la probabilité d'avoir une glycémie supérieure à 0,99 est p = 0,6306. Le fait de regarder si un individu choisi au hasard dans la population a une glycémie supérieure à 0,99 g/l constitue

une épreuve de Bernoulli dont le succès a une probabilité $p = 0{,}6306$. Lorsqu'on répète cette épreuve de Bernoulli pour les 1000 individus constituant l'échantillon aléatoire, le nombre Y de succès observés est le nombre Y d'individus de l'échantillon qui ont une glycémie supérieure à 0,99. Ce nombre Y suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}6306$. Donc, en moyenne, il y aura $E(Y) = n\,p = 630{,}6$ individus de glycémie supérieure à 0,99 dans un échantillon de taille 1000.

La **loi faible des grands nombres** nous dit qu'en moyenne, la proportion d'individus ayant une glycémie supérieure à 0,99 g/l, tend à se rapprocher de la probabilité que la glycémie soit supérieure à 0,99 g/l, à mesure que le nombre d'individus pris en considération augmente. Pour 1 000 individus, on peut donc admettre, quelle que soit la loi de probabilité de la glycémie, que :

Dans un échantillon de taille 1000, il y a en moyenne 630,6 individus qui présentent une glycémie supérieure à 0, 99 g/l.

Exercice 4

Soit X la taille d'un étudiant. Le nombre d'étudiants ayant une taille comprise entre deux limites a et b est, en moyenne :

$$N = 615 \times P\,(a < X < b) = 615 \times \left[F\left(\frac{b-1{,}75}{0{,}20}\right) - F\left(\frac{a-1{,}75}{0{,}20}\right)\right]$$

$$N = 615 \times [\,F\,(5\,b - 8{,}75) - F\,(5\,a - 8{,}75)].$$

On peut donc dresser le tableau suivant des résultats :

Taille X	$-\infty$		1,50		1,65	2,00		$+\infty$
$5\,(X - 1{,}75)$	$-\infty$		– 1,25		– 0,50	1,25		$+\infty$
$F\,(5\,X - 8{,}75)$	0		0,105		0,308	0,894		1
$P\,(X < 1{,}5)$		0,1056						
$P\,(1{,}5 < X < 1{,}65)$				0,2029				
$P\,(X \geqslant 2)$							0,1056	
Nombre N		65		125			65	