EXERCICE 1

a) La probabilité de tirer un poisson rouge est $\frac{3}{5}$

La probabilité de tirer un poisson jaune est $\frac{2}{5}$

C'est une distribution binomiale. La probabilité de tirer 2 R et 1 J est donc

$$C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1 = 0.432$$

b) La seule combinaison permettant de payer 55 F est 1R + 2J

Probabilité : $C_3^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.288$

c) Calculons:

$$C_3^0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.064 \quad et \quad C_3^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 0.216$$

Etablissons le tableau suivant :

R	0	1	2	3
J	3	2	1	0
p_i	0.064	0.288	0.432	0.216
X	60	55	50	45
p_iX_i	3.84	15.84	21.6	9.72

$\rightarrow$ le prix moyen est $E(X) = \sum p_iX_i = 51\,F$.

d) On calcule la variance :

$$\begin{aligned}V(x) &= 0.065(60-51)^2 + 0.288(55-51)^2 + 0.432(50-51)^2 + 0.216(45-51)^2\\ &= 18\end{aligned}$$

D'où l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 4.24\,F$

EXERCICE 2

C'est une loi binomiale avec les probabilités

$$p \text{ (vrai) } = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad q \text{ (faux)} = \frac{4}{5}$$

Le résultat le plus probable, il suffit de calculer l'espérance mathématique

$E(x) = np = 20 \times \frac{1}{5} = 4.$ C'est-à-dire 4 réponses justes.

On peut le vérifier en effectuant un calcul plus détaillé.

Développons les premiers termes de : $\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^{20} = \sum_n C_{20}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{20-n}$

n	1	2	3	4	5	6
C_{20}^{n}	20	190	1140	4845	15504	38760
$\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$	0.2	0.04	0.08	0.00616	0.00032	0.000064
$\left(\frac{4}{5}\right)^{20-n}$	0.0144	0.018	0.0225	0.0281	0.0352	0.0439
p_1	0.0576	0.1368	0.2052	0.2178	0.1746	0.1080

On voit bien que le maximum correspond à n = 4

La probabilité de faire 10/20 est de :

$$C_{20}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{2}{1000}$$

Il est donc préférable d'étudier plutôt que de compter sur sa chance.

EXERCICE 3

1°/ Appelons X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents recensés par jour; les valeurs possibles de X sont entières (variable discrète) et varient de 0 à 5. A chacune de ces valeurs xi, on associe sa probabilité de réalisation pi : nombre de jours d'apparitions divisé par 200. Le nombre moyen d'accidents par jours est alors l'espérance mathématique de X :

E(X) = ∑xipi = (0 x 86 + 1 x 82 + 2 x 22 + 3 x 7 + 4 x 2 + 5 x 1)/200 = 0,8 = 4/5

On peut énoncer qu'il y a en moyenne 0,8 accidents par jour ou, plus concrètement, 4 accidents en moyenne tous les 5 jours.

C'est une moyenne : comme l'indique la statistique (86 jours sans accident), on pourrait constater aucun accident pendant plusieurs jours consécutifs !

2°/ La loi de Poisson est la loi des "anomalies" indépendantes et de faible probabilité, on peut l'appliquer ici a priori directement, faute d'autres informations sur la survenue des accidents.

Nombre xi d'accidents	0	1	2	3	4	5
Probabilités pi	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005

Afin de mieux s'en convaincre, en notant que les accidents sont considérés comme des événements indépendants, on peut interpréter X comme une variable binomiale de paramètre n = 200 (nombre d'épreuves) de moyenne np = 0,8. Par suite p = 0,004 . On est tout à fait dans le champ d'approximation de la loi de Poisson : $n > 50$, $p < 0,1$ et np = 0,8.

Le paramètre de cette loi sera λ = np= 0,8 et :

$\text{Prob}(X = k) = e^{-0,8}(0,8)^k/k!$

Tableaux comparatifs :

La dernière ligne indique les probabilités obtenues par la loi binomiale, très peu pratique ici eu égard au grand nombre d'observation (manipulation de combinaisons et puissances) :

Nombre xi d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1
pi	0,43	0,41	,11	0,035	0,01	0,005
pi théoriques selon Poisson	0,449	0,359	0,144	0,038	0,008	0,001
pi selon loi binomiale	0,448	0,360	0,144	0,038	0,0075	0,001

3°/ La probabilité de voir survenir moins de 3 accidents est théoriquement 0,449 + 0,359 + 0,144 = 0,952. Le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents est donc 0,952 x 200 = 190,4, nombre arrondi à 190. Le nombre fourni par la réalité (statistique) est : 86 + 82 + 22 = 190. On remarque un bon ajustement par la loi de Poisson. Le cas k = 5 est moins convaincant mais il est marginal.

1. Z est élément de $\{0,1,2\}$. On a :

$$P(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=\frac{8}{25}.$$

2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X\geq 1$ et $Z=0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y=0)=P(X=0)+P(X\geq 1\cap Z=0)=P(X=0)+P(X\geq 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0)=0,1+0,9\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=0,136.$$

De même, l'événement $Y=1$ se produit si $X=1$ et $Z\geq 1$ ou bien si $X\geq 2$ et $Z=1$. On en déduit :

$$P(Y=1)=P(X=1)P(Z\geq 1)+P(X=2)P(Z=1)=0,48.$$

Enfin, l'événement $Y=2$ est réalisé si $X\geq 2$ et $Z=2$. Ceci donne :

$$P(Y=2)=P(X\geq 2)P(Z=2)=0,6\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y)=300(0\times 0,136+1\times 0,48+2\times 0,384)=374,4.$$

EXERCICE 4

1. On assimile ce prélèvement de 50 tiges à un tirage aléatoire avec remise, répété 50 fois. Les expériences sont indépendantes et il n'y a que deux issues observées : non conformes ou conformes, la probabilité qu'une tige soit non conforme est de : 0,03 . On est donc dans le cadre d'un shéma de Bernouilli et la variable Y suir la loi B(50 ; 0,03).

2.

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$

$$= C_{50}^{0} 0,03^{0} \times 0,97^{50} + C_{50}^{1} 0,03^{1} \times 0,97^{49} + C_{50}^{2} 0,03^{2} \times 0,97^{48}$$

$$= 0,97^{50} + 50 \times 0,03^{1} \times 0,97^{49} + 1225 \times 0,03^{2} \times 0,97^{48}$$

$$\approx 0,2181 + 0,3372 + 0,2555 \approx 0,81$$

La probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur est de 0,81.

3. Y peut donc être approchée par une loi de poisson de paramètre $\lambda = 50 * 0,03$ soit $\lambda = 1,5$.

4.

$$p(Z = 2) = 0,25$$

$$p(Z \leq 2) = p(Z = 0) + p(Z = 1) + p(Z = 2)$$

$$= 0,223 + 0,335 + 0,251 \approx 0,81$$

Ces résultats correspondent bien à l'approximation faite sur la loi binomiale.