EXERCICE 1

A. La probabilité de ne tirer aucun 6 est de $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.4822$.

La probabilité de tirer au moins un 6 lors de ces quatre jets vaut donc: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5177$.

B. La probabilité pour que le six apparaisse au moins une fois est $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$.

Pour que cette probabilité atteigne ½ il faut que $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$ > ½ , c'est à dire que

(5/6)^2n > -½

soit

2n * [log(5) –log(6)] > log(2)

soit

n > log(2)/[2*[log(5) –log(6)]]

Donc pour $n > 1.900892008$, i.e. $n = 2$, la probabilité que le six apparaisse au moins une fois est plus grande que 0.5

EXERCICE 2

On ne peut pas en déduire que $P(S=9)=P(S=10)$ car les configurations ne sont pas équiprobables.

Il faut tenir compte de l'ordre et donc des permutations possibles de chaque configuration.

Ainsi (3,3,3) ne "compte qu'une fois" alors que (5,2,2) "compte triple" et (5,3,1) "compte six fois".

On obtient ainsi: $P(S=9) = {}^{25}/_{216}$ et $P(S=10) = {}^{27}/_{216}$

EXERCICE 3

L'ensemble fondamental de cette expérience est

$E = \{(Y_1,Y_2,Y_3)$ où Y_1,Y_2,Y_3 sont des entiers et $1< Y_1,Y_2,Y_3 < 6\}$.

Soit X_1, X_2, X_3 les valeurs obtenues. On veut calculer la probabilité de l'événement "$X_1+ X_2+ X_3 > 15$". On appellera cet événement A. La table ci-dessous donne les valeurs de X_1, X_2 et X_3 qui rendent leur somme supérieure ou égale à 15:

X_1	X_2	X_3	somme	poids
3	6	6	15	3!/(1!2!) = 3
4	5	6	15	3!/(1!1!1!) = 6
5	5	5	15	3!/(3!) = 1
4	6	6	16	3!/(1!2!) = 3
5	5	6	16	3!/(2!1!) = 3
5	6	6	17	3!/(1!2!) = 3
6	6	6	18	3!/(3!) = 1

La cinquième colonne correspond au nombre de configurations qui fournissent les valeurs X_1, X_2 et X_3 données. La probabilité recherchée est alors égale à :

$P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(E) = 20/216$ » 0.0926.

Avec Card (E) = 6^3 (nombre d'arrangements avec répétitions de 3 chiffres parmi 6)

EXERCICE 4

On utilise le fait que l'événement *"avoir au moins un succès"* est le complémentaire de l'événement *"n'avoir aucun succès"*. La probabilité d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés vaut ainsi

$1 - (1 - {}^{1}/_{6})^4$ » 0,518,

et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 lors de 24 jets de deux dés vaut

$1 - (1 - {}^{1}/_{36})^{24}$ » 0,491.

EXERCICE 5

Soit D l'événement *"la personne sélectionnée est daltonienne"*, H l'événement *"c'est un homme"* et F l'événement *"c'est une femme"*. Tout d'abord, par la formule de Bayes:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|M)P(M)}$$

Si on admet que les hommes sont aussi nombreux que les femmes, alors $P(H) = P(F) = ½$ et $P(H|D) = {}^{20}/_{21}$

Si au contraire il y avait deux fois plus d'hommes que de femmes, i.e. $P(H) = {}^{2}/_{3}$ et $P(F) = {}^{1}/_{3}$, on obtiendrait : $P(H|D) = {}^{40}/_{41}$

EXERCICE 6

Remarquons d'abord que si M. X et ses deux parents ont les yeux marrons et si la soeur de M. X a les yeux bleus, il faut que les deux parents aient chacun un gène oeil bleu et un gène oeil marron.

a. M. X peut avoir des gènes (M,M),(M,B) et (B,M), et la probabilité pour que M. X ait un gène oeil bleu est donc 2/3.
b. Soient G_X, G_F et G_E les gènes yeux de M. X, de sa femme et de son enfant. On a

$$P(G_E = (B,B)) = P(G_X \in \{(M,B),(B,M)\})\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

EXERCICE 7

Soit V l'événement *"la lettre prise au hasard dans le mot est une voyelle"*, B l'événement *"le mot a été écrit par un Anglais"*, et A l'événement *"le mot a été écrit par un Américain"*. En employant la formule de Bayes on obtient pour la probabilité demandée:

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V|B)P(B) + P(V|A)P(A)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} + \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{10}} = \mathbf{\frac{5}{11}}$$

EXERCICE 8

Soit A l'événement: *"la pièce est acceptée"*, B l'événement: *"la pièce est bonne"*. Remarquons que:

$P(A|B) = 0.9 \quad P(A^C|B^C) = 0.8$.

a. Les 4 pièces sont acceptées, donc le contrôle des 3 bonnes pièces est sans erreur et il y a erreur dans le contrôle de la pièce défectueuse. La probabilité d'un tel événement est:

   $P(A|B)^3 \times P(A|B^C) = 0.9^3 \times 0.2 = 0.1458$.

b. Soit E l'événement: *"il y a erreur dans le contrôle d'une pièce"*. Par la formule des probabilités totales:

   $P(E) = P(A^C|B) \times P(B) + P(A|B^C) \times P(B^C)$

   Ainsi, puisque $P(B^C) = 0.2$ (20% de pièces défectueuses),

   $P(E) = 0.1 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2 = 0.12$.

c. Par la formule de Bayes:

   $P(B^C|A) = {}^{0.2\times 0.2}/_{(0.2\times 0.2 + 0.9\times 0.8)} = {}^{1}/_{19}$ » 0.053