Licence STS mention BGS – 2ème Semestre	Bruno Hérault
Travail Dirigé n°3	Variables Aléatoires - Corrigés

EXERCICE 1

Utilisons la formule de l'espérance, pour une variable aléatoire discrète :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

$\forall i < 0, \ \ P(X = i) = 0$ et $\forall i > 3, \ \ P(X = i) = 0$

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$P(X = 1) = 3.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$P(X = 2) = 3.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{2}{3}$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Ainsi :

$$E(X) = 0.(\frac{1}{3})^3 + 1.3.\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2.3.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{2}{3} + 3.\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\boxed{E(X) = 2}$$

Ne pas oublier d'utiliser la formule des permutations avec répétitions pour X=1 et X=2 !!

EXERCICE 2

X prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X = k) = ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a :

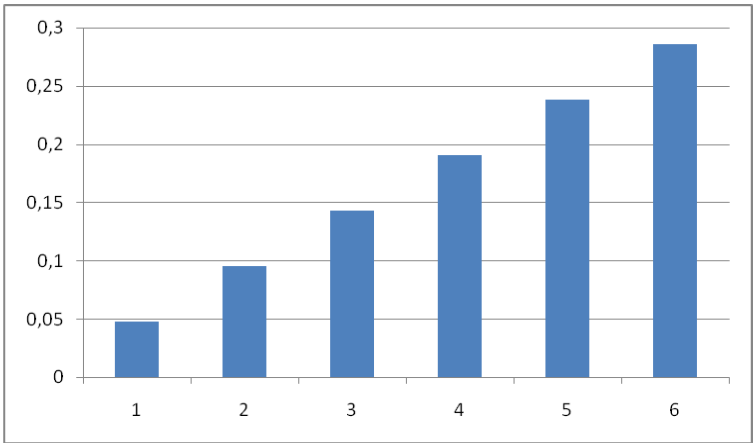
$$\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1 \iff a\frac{6 \times 7}{2} = 1 \implies a = 1/21.$$

On a donc :

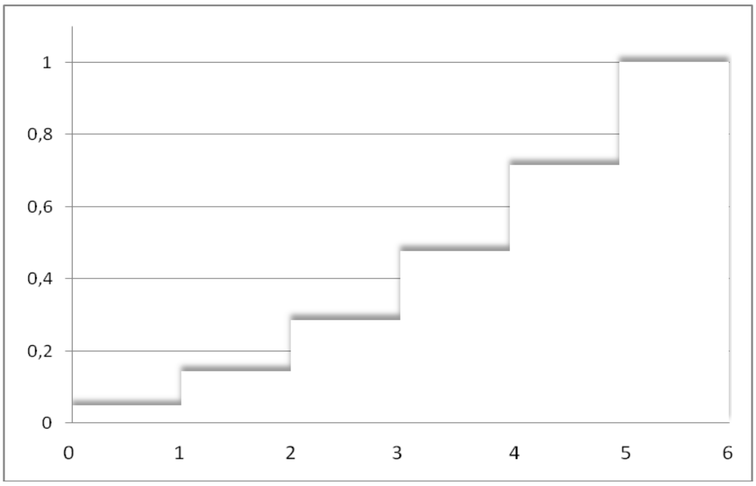
k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule que $E(X) = \frac{13}{3}$.

DISTRIBUTION DE PROBABILITES DE X



FONCTION DE REPARTITION DE X



EXERCICE 3

1. Z est élément de $\{0, 1, 2\}$. On a :

$$P(Z = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z = 0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z = 1) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = \frac{8}{25}.$$

2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y = 0$ se produit si $X = 0$ ou bien si $X \geq 1$ et $Z = 0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X \geq 1 \cap Z = 0) = P(X = 0) + P(X \geq 1)P(Z = 0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y = 0) = 0,1 + 0,9 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,136.$$

De même, l'événement $Y = 1$ se produit si $X = 1$ et $Z \geq 1$ ou bien si $X \geq 2$ et $Z = 1$. On en déduit :

$$P(Y = 1) = P(X = 1)P(Z \geq 1) + P(X = 2)P(Z = 1) = 0,48.$$

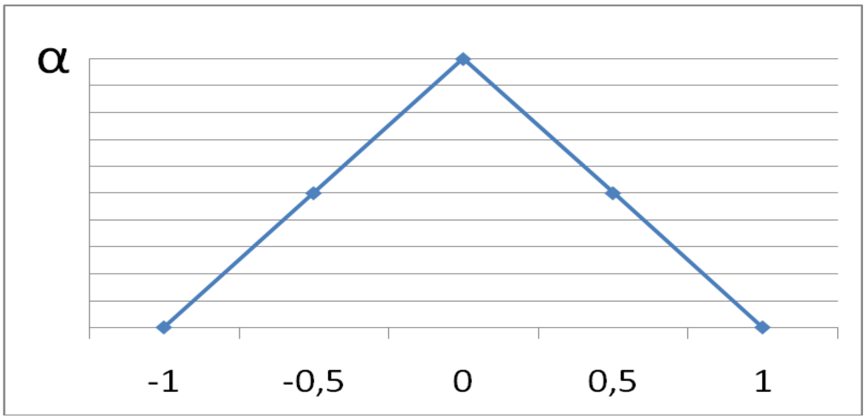
Enfin, l'événement $Y = 2$ est réalisé si $X \geq 2$ et $Z = 2$. Ceci donne :

$$P(Y = 2) = P(X \geq 2)P(Z = 2) = 0,6 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y) = 300(0 \times 0,136 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,384) = 374,4.$$

EXERCICE 4



2. La fonction f est clairement continue et à valeurs positives. La condition supplémentaire pour qu'elle soit une densité de probabilité est que sont intégrale sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \alpha\, (1 - |x|)\, dx = \alpha\ ;$$

la dernière égalité étant due au fait qu'il s'agit de l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur α. La fonction f est donc une densité de probabilité lorsque $\alpha = 1$.

3. Calculons l'espérance d'une variable aléatoire X de densité f :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\ dx\ .$$

Pour pouvoir calculer cette intégrale, on coupe en deux :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^{0} x(1+x)\ dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\ dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} \\
&= -\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

Ce résultat était prévisible car f est paire.